Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
19.03.2016.

VIII разред

1. У координатној равни xOy дата је права $4x + 3y = n$, $n > 0$, која је од координатног почетка O удаљена 12. Одреди површину троугла коју та права заклапа са координатним осама Ox и Oy.

2. Основна ивица правилне четворостране пирамиде је 4cm, а растојање средишта основе од једне бочне стране је $\frac{\sqrt{15}}{2}$cm. Израчунај запремину те пирамиде.

3. Кружница $c(O_1, r_1)$ додирује изнутра кружницу $k(O, r)$ у тачки A и при томе је $r > 2r_1$. Полуправа са почетном тачком O додирује кружницу c у тачки C и сече кружницу k у тачки B. Одреди величину угла BAC.

4. Одреди све целе бројеве x за које је број $\sqrt{\frac{x+25}{x-5}}$ квадрат неког природног броја.

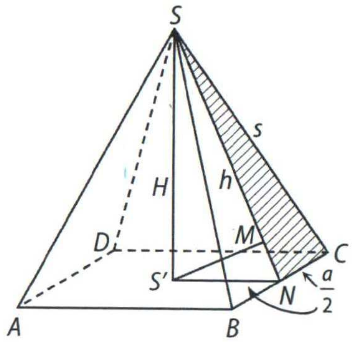
5. У свако поље таблице 3×3 уписан је један број. Производ бројева у свакој врсти и свакој колони је 1, а производ бројева у сваком квадрату 2×2 је 2. Који број је уписан у централно поље?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 50/3**) Нека права $4x + 3y = n$ сече осе Ox и Oy у тачкама A и B редом. Тада је $A\left(\frac{n}{4},0\right)$ и $B\left(0,\frac{n}{3}\right)$, па је $OA=\frac{n}{4}$ и $OB=\frac{n}{3}$ [**4 поена**]. Хипотенузу AB израчунавамо применом Питагорине теореме на правоугли троугао OAB: $AB^2=OA^2+OB^2=\left(\frac{n}{4}\right)^2+\left(\frac{n}{3}\right)^2$, одакле је $AB=\frac{5n}{12}$ [**4 поена**]. Висина која одговара хипотенузи је 12, па је површина троугла OAB: $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{5n}{12}\cdot 12=\frac{5n}{2}$ [**4 поена**]. С друге стране је $P=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{n^2}{24}$. Сада је $\frac{5n}{2}=\frac{n^2}{24}$ [**4 поена**], па имамо $n=60$ и $P=150$ [**4 поена**].



2. Нека је S' средиште основе пирамиде $ABCDS$ и M подножје висине из S' на страну BCS. Тачка M припада апотеми NS стране BCS. Не тражи се доказ! Слика обавезна (**5 поена**). Троугао $SS'N$ је правоугли, висина која одговара хипотенузи је $S'M=\frac{\sqrt{15}}{2}$cm, катета $S'N=2$cm.

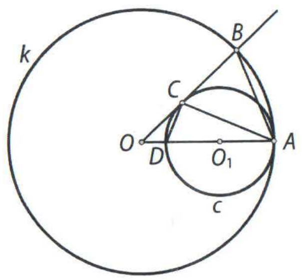
Из троугла $S'NM$ је $MN^2=2^2-\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $MN=\frac{1}{2}$cm (**3 поена**).

Из троугла $S'NS$ је $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot MS$, па је $MS=\frac{15}{2}$cm (**5 поена**).

Даље је из троугла $S'SN$: $(SS')^2=8^2-2^2=60$, $SS'=2\sqrt{15}$cm (**3 поена**).

Запремина пирамиде је $V=\frac{32\sqrt{15}}{3}$cm^3 (**4 поена**).

3. Нека је $\measuredangle BOA = \alpha$, $\measuredangle BAC = x$, $\measuredangle CAO = y$. Троугао OAB је једнакокрак ($OA = OB$), па је $\measuredangle OBA = x + y$. Из троугла OBA је $\alpha + 2x + 2y = 180°$ (*)[**5 поена**]. Нека је D други пресек праве OA са кружницом c. Тада је $\measuredangle ACD$ прав. Поред тога је $\measuredangle OCD = \measuredangle OAC$ (периферисјки угао над тетивом CD једнак је углу између тетиве CD и тангенте у тачки C), па из троугла OAC имамо да је $\alpha + 2y = 90°$ (**)[**10 поена**]. Из (*) и (**) следи да је $2x = 90°$, тј. $x = 45°$ [**5 поена**].



4. Како је $\sqrt{\frac{x+25}{x-5}} = \sqrt{\frac{x-5+30}{x-5}} = \sqrt{1+\frac{30}{x-5}}$, број под кореном би могао бити природан само ако $(x-5) \mid 30$ [**5 поена**], то јест за $x - 5 \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, односно $x \in \{6, 7, 8, 10, 11, 15, 20, 35\}$ [**5 поена**]. Провером се утврђује да је једино за x = 7 број $\sqrt{\frac{x+25}{x-5}}$ једнак квадрату природног броја 2 $\left[\sqrt{\frac{7+25}{7-5}} = 4 = 2^2\right]$ [**10 поена**].

5. Нека су бројеви уписани као у следећој таблици.

a	b	c
d	x	e
f	g	h

Из услова задатка је $abcdefghx = (abc) \cdot (dxe) \cdot (fgh) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ [**5 поена**] и $(abdx) \cdot (bcxe) \cdot (dxfg) \cdot (xegh) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ [**5 поена**]. Такође је

$$(abdx) \cdot (bcxe) \cdot (dxfg) \cdot (xegh) = (abcdefghx) \cdot (bxg) \cdot (dxe) \cdot x = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x,$$

одакле је $x = 16$ [**10 поена**].

Напомена: Може се показати да квадрат са наведеним особинама заиста постоји, али то се не тражи у задатку.